数理解析研究所講究録
411巻 1981年 121-141

数の幾何学と類体論

名大理　　久保田 富雄

アーベル拡大体K/Fがあるとき，Fの因子$\mathfrak{f}$を十分大きくとれば，mod $\mathfrak{f}$で1に合同なFのイデアルについては，Artin記号が1になる．これが，いわゆるArtin型相互法則であって，類体論の全成果を殆んど完全に集約する命題である．この命題は，一般の場合には，どの方法によるにしても，多くの複雑な議論の末に始めて証明されているのであるが，K/Fが円分拡大の場合には，極めて簡明かつ直観的に結論することができる．

一方，Fが1のn乗根を含むときには，古典的なべき剰余の相互法則というものがあり，そのひとつの形は

$$(1)\qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_n, \qquad (\beta \equiv 1 \pmod{n^2}),$$

とかける．ただし，α, βはFの整数で，$(\alpha\beta, n)=1$である．また，(1)と並んで，Fの任意の整数$\alpha\ (\neq 0)$について

$$(2) \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n = 1, \quad (\beta \equiv 1 \pmod{n^2\alpha}),$$

という形の相互法則もなりたつ．(1)は(2)を完全にではないが含んでいる．また，今の場合あまり重要なことではないが，(1)，(2)においては，βがさらに総正という条件が必要となることもある．

ところで，ここで主張したいことは，(2)という命題が，全く拡大体を考えることなく，Fの整数に関する格子点の幾何学と呼ばれるタイプの考察(linear diophantine geometry)によって，極めて直観的に証明し得るということである．(2)は，Fのクンマー拡大体に関するArtin型相互法則に他ならないから，(2)を用いて，クンマー拡大K/Fの類体論が直ちに得られ，それを局所化するといったような，すでに十分完成している途を通って(1)に至ることができる．また，一般アーベル体が，円分拡大とクンマー拡大の合成で得られることを用いて，一般の場合の類体論を簡明な形で再構成する途も開けるわけである．

しかし，さらに注意すべきことは，(2)から(1)を出すのは，類体論の方法によらなくても，本講究録378(1980)にごく大まかに述べたとおり，Fにおけるフーリエ解析的方法だけで足りるのであり，これによって，拡大体などよりも古い

起原を持つと考えられる（1）のような相互法則が，当初の姿のまま，基礎体自体の性質としてとらえられるようになるということである．今までは，（1）が逆に全類体論に依存するという不自然な状態であった．

以下，（2）の幾何学的とりあつかい方について説明することにするが，結果を一般の場合に完全にまとめ上げるためには，なお相当の日時を要するので，ここでは，とりあえず手もとに用意してあったノートを呈示して，アイデアの一端を示すに止めたい．従って考察は $F = Q(\sqrt{-1})$，$n = 4$ の場合に限られ，方法そのものも，一般の場合にはもう一段の飛躍をしないと適用困難な，比較的素朴なもの（ノートの中で first method と書いてあるもの）しか説明されないが，現在のところ止むを得ないことである．

ノート

§1. 有理数体における平方剰余

有理数体における平方剰余の相互法則の証明について、簡単な見直しを行う。

実直線を $\frac{1}{2}$ の倍数で区切り、長さ $\frac{1}{2}$ の開区間の集合を作る。$(0, \frac{1}{2})$ には符号 $+1$ をあたえ、あと交互に $+1$, -1 をあたえる。

$a \neq 0$ を任意の有理整数とし、区間 $(0, \frac{1}{2})$ を a 倍した区間 $(0, \frac{1}{2}a)$ を作ると、それは始めにあたえた長さ $\frac{1}{2}$ の区間の合併になる。そこで、$\frac{1}{a}$ に短縮する写像をほどこすと、$(0, \frac{1}{2})$ が長さ $\frac{1}{2|a|}$ の区間の合併となる。その際、区間の符号も、そのまま小さい区間に持ちこまれるものと考える。

$b > 0$ を有理整数で、$(2a, b) = 1$ となるものとし、区間 $(0, \frac{1}{2})$ に含まれる $\mathbb{Z}$ の b 分点を考えると、それらは $(0, \frac{1}{2})$ 内にあたえられている小区間の端点になることはない。

そして，それらの b 分点の属す小区間の符号をすべてかけたものが，Gauss の lemma によって $\left(\frac{a}{b}\right)$ に等しい．

今，ひとつの小区間 $\left(\frac{k}{2a}, \frac{k+1}{2a}\right)$，$(0 \leqq k < |a|)$，をとり，この中に含まれる b 分点の個数を考察する．そのためには，この区間を b 倍し，その中に入る $\mathbb{Z}$ の元の個数をしらべればよい．$b \neq 1$ とし，$b = b_0 + 1$ とおくと，

$$\left(\frac{k}{2a}b, \frac{k+1}{2a}b\right) = \left(\frac{k}{2a}b_0 + \frac{k}{2a}, \frac{k+1}{2a}b_0 + \frac{k}{2a} + \frac{1}{2a}\right)$$

$$= \left(\frac{k}{2a}b_0 + \frac{k}{2a}, \frac{k+1}{2a}b_0 + \frac{k}{2a}\right] \cup \left(\frac{k+1}{2a}b_0 + \frac{k}{2a}, \frac{k+1}{2a}b_0 + \frac{k+1}{2a}\right)$$

であるから，もし b_0 が $2a$ の倍数ならば，最後の式の第1の区間には丁度 $\frac{b_0}{2a}$ 個の $\mathbb{Z}$ の元が入り，第2の区間にはひとつも入らない．従ってさらに b_0 が $4a$ の倍数ならば，区間 $\left(\frac{k}{2a}b, \frac{k+1}{2a}b\right)$ に入る有理整数の個数は k に無関係に偶数であり，ひとつひとつの区間について符号の積が 1 になるから，もちろん $\left(\frac{a}{b}\right) = 1$ ということになる．

上記の区間の式は，$a<0$ の時は，必ずしも右側にある数が大きいと考えずに読めばよい．しかし，$b>0$ という方の条件は本質的である．これがないと，区間が合併 $\cup$ でかけられない．

ともかく，これで任意の有理整数 $a \neq 0$ について，$b \in \mathbb{Z}$，$b \equiv 1 \pmod{4a}$ ならば，$\left(\frac{a}{b}\right)=1$ であることが示された．

区間 $(0, \frac{1}{2})$ は，実直線の変換 $x \to x+1$ と $x \to -x$ で生成される非可換な群の基本領域という意味をもっている．

§2. Gauss 数体における 4 乗剰余（first method）

Gauss 数体の 4 乗剰余についても，前 § で説明した方法は原則として適用できるのであるが，通常のように整数の加群 $\mathfrak{O}$ の基本領域として正方形を用いるといった考え方ではうまく行かない．$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4$ をあつかうためには，α にも β にも depend する基本領域をとることが必要となる．まず，比較的

直観的であつかいやすい方法について述べる。これから問題となるのは $\mathbb{C}/\mathfrak{o}$ に相当する基本領域ではなくて、$z \to z+\gamma$, $(\gamma \in \mathfrak{o})$, と、$z \to iz$ とで生成される群の基本領域である。

複素平面から $\frac{1}{2}$ の倍数をすべてとり除き、残りを $\mathrm{Re}\, z \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ および $\mathrm{Im}\, z \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ で仕切られた正方形の合併にわける。但し、正方形 $0\ \frac{1}{2}\ \frac{1+i}{2}\ \frac{i}{2}$ については、$(0, \frac{1}{2})$ と $(\frac{1}{2}, \frac{1+i}{2})$ との2辺だけが境界として属すものとし、0のまわりの4つの正方形については、i による回転で対応する辺をそれぞれ属させる。次に $\mathfrak{o}$ の元による平行移動ですべての正方形について辺の所属を定める。

一般に、$\mathbb{C}$ 上の平行4辺形で、a, b, c を3頂点とし、$[a, b)$, $[a, c)$ だけを境界に含むものを (c, a, b) と書く。今問題の基本領域として、$(0, \frac{1}{2}, \frac{1+i}{2})$ をとったわけである。

$\frac{1}{2}$ の倍数は、基本領域というものの性格等を考慮して、便宜上除いておくのであるが、実際にはそのような点が重要になることはないので、個々の議論については、

いちいち注意しなくても，誤りを生じることはない．しかし，たとえば $(0, \frac{1}{2}, \frac{1+i}{2})$ といったときも，$\frac{1}{2}$ は除かれているのである．

正方形 $(0, \frac{1}{2}, \frac{1+i}{2})$ に符号 $+1$ をあたえ，これを i, -1, $-i$ で回転した正方形にはそれぞれその符号をあたえる．次にこれらの正方形と mod $\mathfrak{o}$ で合同な正方形にはすべて同じ符号をあたえる．このようにして，$\mathbb{C}$ を分割して作ったすべての正方形に符号があたえられる．

$\alpha \in \mathfrak{o}$ を $\alpha \neq 0$, $\alpha \equiv 0 \pmod 2$ であるようにとり，$z \to \frac{z}{\alpha}$ という変換を行うと，今まで考えていた一辺 $\frac{1}{2}$ の正方形による $\mathbb{C}$ の分割が，一辺 $\frac{1}{2\alpha}$ の小正方形による分割に変換される．このとき，小正方形にも前の符号をひきついであたえ，$\mathfrak{o}$ の 2α 分点は考察から除く．

Prop. $z \equiv z' \pmod{\frac{1}{2}}$ なら，z の属する小正方形の符号と z' のそれとは一致する．一方が辺上にあれば他方もある．

証．$\alpha z \equiv \alpha z' \pmod{\frac{\alpha}{2}}$ で，$\frac{\alpha}{2} \in \mathfrak{o}$. (q.e.d.)

ここで $\beta \in \vartheta$ を $\beta \neq 0$ かつ $\beta_0 = \beta - 1 \neq 0$ であるようにとる。β_0は後にいろいろな数でわり切れるようにするのであるが、ここではまず、有向線分のβ変形というものを定義する。これは、aからbに向いた、両端を向かない線分、たとえば (a, b) について、それを $1 = \frac{\beta_0 + 1}{\beta}$ に対応する折線 $\frac{\beta_0}{\beta}\overrightarrow{ab} \cup \frac{1}{\beta}\overrightarrow{ab}$ におきかえることである。くわしく書けばこの折線は、$\left(a,\ a + \frac{\beta_0}{\beta}(b-a)\right] \cup \left(a + \frac{\beta_0}{\beta}(b-a),\ b\right)$ ということになる。

$\mathrm{Re}\,\alpha$ と $\mathrm{Im}\,\alpha$ の最小公倍数を $A(>0)$ とする。もし、$\mathrm{Re}\,\alpha$ か $\mathrm{Im}\,\alpha$ の一方が0のときは他方の絶対値をAとする。正方形 $(0, \frac{1}{2}, \frac{1+i}{2})$ の辺 $(0, \frac{1}{2})$ を A等分し、各部分を正の方向にβ変形する。次に辺 $(\frac{1}{2}, \frac{1+i}{2})$ を同様にA等分し、$+i$方向に各部分をβ変形する。残りの2辺も同じように、それぞれ対辺と同じ方向に

変形する. このようにして得られた折線でかこまれた領域を D_0 とする. 但し境界は $(0, \frac{i}{2})$ と $(\frac{1}{2}, \frac{1+i}{2})$ からできた部分だけが D_0 に属するものとする. $\pm D_0$, $\pm iD_0$ およびその $\mathfrak{o}$ の元による平行移動で $\mathbb{C}$ ($\frac{i}{2}$の倍数を除く) は覆われる.

Prop. $\mathbb{C}$ 上に $\mathrm{Re}\, z \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}\, z \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ で定まる網を作り, この網を α に縮少した網を作ると, 大小の網の交点の Re, Im はいずれも $\frac{1}{A}$ の倍数である.

証. $\mathrm{Re}\,\alpha$ か $\mathrm{Im}\,\alpha$ が 0 のときは明らかであるから, $\mathrm{Re}\,\alpha \neq 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$ とする. 大小の網の交点は

$$\mathrm{Re}\, z,\ \mathrm{Im}\, z = a \in \mathbb{Z}, \qquad \mathrm{Re}\,\alpha z,\ \mathrm{Im}\,\alpha z = b \in \mathbb{Z}$$

を4つの組合わせで連立にしてできる方程式から得られる. $z = x + iy$ とおけば, $\mathrm{Re}\,\alpha z = \mathrm{Re}\,\alpha \cdot x - \mathrm{Im}\,\alpha \cdot y$, $\mathrm{Im}\,\alpha z = \mathrm{Im}\,\alpha \cdot x + \mathrm{Re}\,\alpha \cdot y$. これにより, 得られる解の分母

は $\operatorname{Im}\alpha$ か $\operatorname{Re}\alpha$ である。 (q. e. d.)

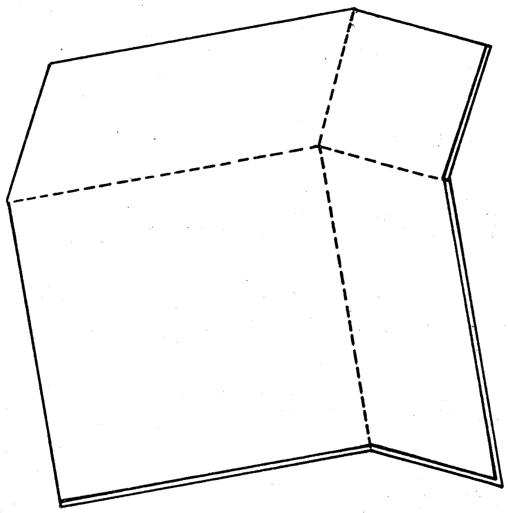
この Prop. により、大きな網の各正方形を D_0 またはその i のべきによる回転と mod $\mathfrak{o}$ で合同なように変形してから $\frac{1}{\alpha}$ にしても、大小の網の交点は不変である。

以後 $\mathbb{C}$ はこのような変形された小さな網の構造が入れられ、各区画には変形する前の正方形と同じ符号があたえられ、すべての $A\alpha$ 分点は $\mathbb{C}$ から除かれているものとする。

D_0 に属す $\mathfrak{o}$ の β 分点 ($\neq 0$) につき、それの属す小さな変形された網の区画をなす小領域の符号を対応させ、それらをすべてかければ、Gauss の lemma によって $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4$ が得られる。符号をひとつの小領域に属す β 分点だけについてかけあわせたものを調べるには、$z \to \beta z$ によって $\mathbb{C} - \{A\alpha$ 分点$\}$ を $\mathbb{C}$ に写し、小領域の像の中にどのくらい $\mathfrak{o}$ の元が入るかを見ればよい。

以下 $\beta = \beta_0 + 1$, $\operatorname{Re}\beta_0 > 0$ とする。このようにすれば、線分を β 変形した時に生じる2つの線分の

なす角は鈍角となり，　D_0 は図のような領域および



それを右と上とへ平行移動した領域の A^2 個で覆われる．（2重線は境界の所属）

これから，$\mathbb{C}$ を（くわしくは $\mathbb{C}-(A\alpha)$ を）覆う $\frac{i^c}{\alpha}D_0$ と合同 $(\mathrm{mod}\ \frac{1}{\alpha})$ な小領域と D_0 との共通部分に，何個の β 分点が入るかということについて考える．

まず，そのような小領域が全く D_0 に含まれてしまう場合をあつかう．このときは，上図の説明において示されたように，問題はさらに小さな領域

$$\frac{\mu}{A\alpha}+\frac{i^c}{A\alpha}\Big[\Big(0,\ \frac{\beta_0}{\beta},\ \frac{\beta_0}{\beta}(1+i)\Big)\cup\Big(\frac{\beta_0}{\beta},\ 1,\ 1+\frac{\beta_0}{\beta}i\Big)$$
$$\cup\Big(\frac{\beta_0}{\beta}i,\ \frac{\beta_0}{\beta}(1+i),\ i+\frac{\beta_0}{\beta}\Big)\cup\Big(\frac{\beta_0}{\beta}(1+i),\ 1+\frac{\beta_0}{\beta}i,\ 1+i\Big)\Big]$$

に帰着する．$\mu \in \mathfrak{o}$ である．ここで，$\beta_0 \equiv 0 \pmod{A\alpha}$ と仮定して，この領域を β 倍し，全平面 $\mathbb{C}$ の中へ写すと，その像は $\bmod \mathfrak{o}$ で

$$\frac{\mu}{A\alpha} + i^c\left[\left(0, \frac{\beta_0}{A\alpha}, \frac{\beta_0}{A\alpha}(1+i)\right) \cup \left(\frac{\beta_0}{A\alpha}, \frac{\beta_0+1}{A\alpha}, \frac{\beta_0}{A\alpha}(1+i)+\frac{1}{A\alpha}\right)\right.$$
$$\left.\cup \left(\frac{\beta_0}{A\alpha}i, \frac{\beta_0}{A\alpha}(1+i), \frac{\beta_0}{A\alpha}(1+i)+\frac{i}{A\alpha}\right) \cup \left(\frac{\beta_0}{A\alpha}(1+i), \frac{\beta_0}{A\alpha}(1+i)+\frac{1}{A\alpha}, \frac{\beta_0+1}{A\alpha}(1+i)\right)\right]$$

となる．この式の最後に現われている正方形は，さらに $\bmod \mathfrak{o}$ で

$$\frac{\mu}{A\alpha} + i^c\left(0, \frac{1}{A\alpha}, \frac{1+i}{A\alpha}\right)$$

に合同であるが，この正方形はとなりあう４つの $A\alpha$ 分点を頂点とする変形されていないものであり，それを変形した領域は D_0 に入っている．なぜなら，最初のとり方がそのようになっているからである．故に，上式の正方形には，０以外の整数点は D_0 の位置から入り得ず，０も境界の所属から見て入り得ない．

ここで，さらに $\beta_0 \equiv 0 \pmod{4A\alpha}$ と仮定すると，上で合併をとった４つの平行４辺形のうち最初の３つは，いずれも，ひとつの平行４辺形を４の倍数回平行移動したものの（disjointな）合併としてあらわされる．故に

それらに含まれる $\mathfrak{a}$ の元の個数は 4の倍数である. 従って fig. 以降考察してきた, $\frac{1}{\alpha}D_0$ と mod $\frac{1}{\alpha}$ で合同な小領域に入る整数点の個数は, その領域が D_0 に含まれる場合には 4の倍数である.

次に, 領域が D_0 に含まれない場合を考えるために, 領域と D_0 との共通部分を, $\frac{1}{2}$ または $\frac{i}{2}$ だけ上下左右に平行移動したとき, 中の整数点の個数がどのように変化するかを調べる. $\beta_0 \equiv 0 \pmod{4A\alpha}$ は常に仮定する. 証明したい結果は個数の変化が 4の倍数にすぎないということである.

この問題は, たとえば上下の移動についていうと, 結局 $\left(\frac{\mu}{A}, \frac{\mu+1}{A}, \frac{\mu+1}{A}+\frac{i}{2}\right)$, または $\left(\frac{\mu}{A\alpha}, \frac{\mu+i^c}{A\alpha}, \frac{\mu+i^c}{A\alpha}\pm\frac{i}{2}\right)$ という平行4辺形の辺を, 並んだ順の方向に β 変形して得られる領域の中の β 分点を数えることに帰する. 前者は D_0 の $0, \frac{i}{2}$ を結ぶ境界線に関するもの, 後者はそれにひっかかる小領域の境界に関するもの

であり，後者における複号±において，－をとるのは，$\frac{\mu}{A\alpha}$ を D_0 の $\frac{i}{2}$，$\frac{i}{2}+\frac{1}{2}$ を結ぶ境界に近くとるということで，小領域の境界であってそれに属さないものの移動については μ をそのようにとるのである．(1番目のProp.参照．また移動させる小折線の小領域への所属，非所属は，$A\alpha$ 分点を通過するまで変化しないことに注意)

さて，$\left(\frac{\mu}{A\alpha},\ \frac{\mu+i^c}{A\alpha},\ \frac{\mu+i^c}{A\alpha}\pm\frac{i}{2}\right)$ の β 変形は

$$\frac{\mu}{A\alpha}+\frac{1}{A\alpha}\Big[\Big(0,\ \frac{\beta_0}{\beta}i^c,\ \frac{\beta_0}{\beta}i^c\pm\frac{\beta_0}{\beta}\frac{A\alpha i}{2}\Big)\cup\Big(\frac{\beta_0}{\beta}i^c,\ i^c,\ i^c\pm\frac{\beta_0}{\beta}\frac{A\alpha i}{2}\Big)$$

$$\cup\Big(\pm\frac{\beta_0}{\beta}\frac{A\alpha i}{2},\ \frac{\beta_0}{\beta}i^c\pm\frac{\beta_0}{\beta}\frac{A\alpha i}{2},\ \frac{\beta_0}{\beta}i^c\pm\frac{A\alpha i}{2}\Big)\cup\Big(\frac{\beta_0}{\beta}i^c\pm\frac{\beta_0}{\beta}\frac{A\alpha i}{2},\ i^c\pm\frac{\beta_0}{\beta}\frac{A\alpha i}{2},\ i^c\pm\frac{A\alpha i}{2}\Big)\Big]$$

であるが，これを β 倍したものは mod Ω で

$$\frac{\mu}{A\alpha}+\Big[\Big(0,\ \frac{\beta_0}{A\alpha}i^c,\ \frac{\beta_0}{A\alpha}i^c\pm\frac{\beta_0 i}{2}\Big)\cup\Big(\frac{\beta_0}{A\alpha}i^c,\ \frac{\beta}{A\alpha}i^c,\ \frac{\beta}{A\alpha}i^c\pm\frac{\beta_0 i}{2}\Big)$$

$$\cup\Big(\pm\frac{\beta_0 i}{2},\ \frac{\beta_0}{A\alpha}i^c\pm\frac{\beta_0 i}{2},\ \frac{\beta_0}{A\alpha}i^c\pm\frac{\beta i}{2}\Big)\cup\Big(\frac{\beta_0}{A\alpha}i^c\pm\frac{\beta_0 i}{2},\ \frac{\beta}{A\alpha}i^c\pm\frac{\beta_0 i}{2},\ \frac{\beta}{A\alpha}i^c\pm\frac{\beta i}{2}\Big)\Big]$$

となる．この式の最後の平行4辺形は，さらに mod Ω で

$$\frac{\mu}{A\alpha}+\Big(0,\ \frac{i^c}{A\alpha},\ \frac{i^c}{A\alpha}\pm\frac{i}{2}\Big)$$

に合同であり、整数点を含まない。なぜなら、線分 $\left(\frac{\mu}{A\alpha}, \frac{\mu+i^c}{A\alpha}\right]$ のとり方から、唯一の可能性である $\mu+i^c=0$ がおこらないからである。他の3つの平行4辺形は、β_0 に関する仮定から、4の倍数個の整数点を含む。p. 11 にあげた2つの平行4辺形のうち前者は、今の考察のごく一部を変更するだけで、$\frac{\mu}{A}+\left(0, \frac{1}{A}, \frac{1}{A}+\frac{i}{2}\right)$ が0を含まないことを用いて処理される。すなわち、形式的に $\alpha=1$ $c=0$ とした式を書けばよい。左右の移動の場合には、$\left(\frac{\mu}{A}, \frac{\mu+i}{A}, \frac{\mu+i}{A}-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\mu}{A\alpha}, \frac{\mu+i^c}{A\alpha}, \frac{\mu+i^c}{A\alpha}\pm\frac{1}{2}\right)$ から出発すればよく、計算は前の対応する場合に形式的に i をかけて行けばよい。

これで、$\alpha, \beta \in \mathfrak{o}$, $\alpha \equiv 0 \pmod 2$ のとき、$Re\,\alpha$ と $Im\,\alpha$ の最小公倍数 A（どちらかが0の時は他方）について $\beta \equiv 1 \pmod{4A\alpha}$ ならば、$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4 = 1$ であることが $Re(\beta-1) > 0$ という技術的な仮定の下で示された。

§3. 注意事項

今までに説明したように，Gaussの数体における4乗剰余の相互法則の基礎部分は，線分のp変形という考えを使うだけで，$\frac{1}{\alpha}D_0$と同じ形をした各小領域内のβ分点の個数が4でわり切れるという，より強い事実の帰結になってしまうのであるが，今までの方法の中にはまだいくつかの不便な点や，不完全な部分がある．最も大きな欠点は，一般代数体への拡張の見とおしがつけにくいことであり，$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4=1$となる$\beta$の満足すべき合同条件に，$\mathrm{Re}\,\alpha$や$\mathrm{Im}\,\alpha$が入るというところにも，意味のわからないことがあらわれている．この点の改良は別の機会にあつかうが，ここでは，主として領域の境界のとりあつかいを，理論的にsmoothなものに改良し，さらに$\mathrm{Re}(\beta-1)>0$といった不自然な条件をとり去ることについて注意する．

まず, §1 の $\mathbb{Q}$ の場合についていえば, $\mathbb{R}$ を長さ $\frac{1}{2}$ の区間に分ける時, $\frac{1}{2}$ の倍数は, 0 も含めて, それを端点とする区間に $\frac{1}{2}$ 個づつ別れて属すると考えるのである. このようにすると, $x \to x+1$ と $x \to -x$ で生成される群の基本領域が, 不動点も含めてうまく定められたことになる. さらに, $\frac{1}{2}$ の倍数を端点とする長さ $\frac{1}{2}$ の区間を $\frac{b}{a}$ 倍してその中の整数点を数える場合, $\frac{1}{2}$ の倍数が 0 でなければ, それを $\frac{b}{a}$ 倍しても整数にならないことから, 新しい数え方によっても整数点の個数は 0 を端点としない区間については変らず, 0 を端点とする区間については $\frac{1}{2}$ だけ, すなわち 0 のぶんだけ増えることになる.

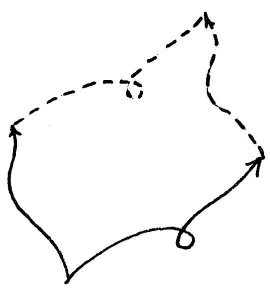
このようにしてから §1 の議論をくりかえすと, $(0, \frac{1}{2})$ 区間の分割の式において, やはり区間の端点はすべて $\frac{1}{2}$ づつその区間に属すものと考えることにより, $\cup$ の前の区間は長さが

$\frac{b_0}{2a}$ であるから偶数個の整数点を含み，後の区間は $k=0$ のときだけ $\frac{1}{2}$ 個の整数点を含む．しかし，b 分点から 0 を除くために，丁度 $\frac{1}{2}$ が 0 から来る $\frac{1}{2}$ と打ち消されて，すべての区間に偶数個の整数点が含まれることになるのである．

複素平面上の場合は，考える領域はすべてある平行移動の群の基本領域の形をしていて，しかも，異る2つの方向に動く折線運動の合成によってその領域は書かれている．従って，1次元の場合の数え方の直積をとった形で，平行4辺形の辺上の点は $\frac{1}{2}$，頂点は $\frac{1}{4}$ と常に数えることにする．このようにしても，§2の平行4辺形の分割の議論によって，我々の考察にあらわれるどのように小さい，あるいは細長い平行4辺形においても，$\mu=0$ の場合を除いて頂点が問題の点，すなわち β 倍しない前ならば β 分点，した後ならば整数点になることはなく，また辺上には4の倍数個しか現われ

ない. 従って, 少し無駄ではあるが, $\beta_0 \equiv 0 \pmod{8A\alpha}$ を仮定しておけば, 辺上の点を $\frac{1}{2}$ と数えても, なおその総数は 4 の倍数である. $\mu = 0$ の場合には, β 変形された領域を 4つの平行4辺形に分割する際, いちばん小さい部分, すなわち β_0 に比例する辺のない部分から $\frac{1}{4}$ が現われるが, これは 0 から来る $\frac{1}{4}$ と消し合う. このようにして, 境界の所属や, $A\alpha$ 分点の除去といったことを避けて, §2の証明が再現されるのである.

この方法の効用は, §2において仮定した $Re\,\beta > 0$ という条件がなくても殆ど同様に適用されるところにある.



すなわち, 平面上の 2つの運動は, たとえ重複点があっても, その合成として, ひとつの 2重周期群の基本領域を形づくるから, 重複した領域を許せば, 今まで

の議論における $Re(\beta-1)>0$ という仮定は必要ないのである。しかし，この場合，領域には符号または さらに一般に，正負の重複度が考えられなければならない。境界の数え方は上と同様でよい。§2における平方4辺形の分割の議論についていえば，§2の図の2つの細長い部分は，大きな正方形の部分に重なり，符号が－になる場合が現われる。しかし，整数点の数が4の倍数という性質は不変で，さらに，右上の小さい正方形は，符号が依然 + である。従って $\mu=0$ のときでも $\frac{1}{4}$ という個数は 0 から来る $\frac{1}{4}$ と消しあう。Qの場合に類似のことを行えば，小さい区間の符号が－になってしまい，そのような消し合いが起らない。このような形で無限素点の虚・実がはっきり現われるのである。